

6. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x, y) = e^x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Funkce f nezávisí na proměnné y , proto nás budou zajímat M^y (respektive nás zajímá $\cup_{y \in \mathbb{R}} M^y$). Množina M je elipsou, přičemž x -ová poloosa je 1. Vidíme, že největší M^y je $[-1, 1]$. O funkci e^x víme, že je rostoucí. Z toho dostáváme, že $\max_M f(x, y) = \max_{x \in [-1, 1]} e^x = e$ a $\min_M f(x, y) = \min_{x \in [-1, 1]} e^x = e^{-1}$.

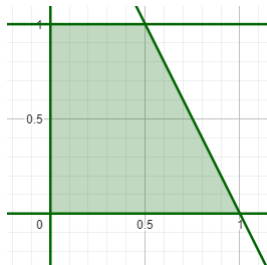
Určeme ještě, kde f svých maxim a minim nabývá v množině M . Maxima nabývá v případě, že $x = 1$. Aby $[1, y] \in M$, musí platit, že $1^2 + 2y^2 \leq 1$, tedy $y^2 \leq 0$, tedy $y = 0$. Proto f nabývá svého maxima na množině M nabývá pouze v bodě $[1, 0]$. Podobně se odvodí, že minima na M nabývá pouze v bodě $[-1, 0]$.

Příklad 1 (b) $f(x, y) = x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2], y \in [0, 1], 2x + y \leq 2\}$

Zřejmě platí, že $M \subset B(0, 3)$, neb maximální hodnota $\sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x \in [0, 2], y \in [0, 1]$ je $\sqrt{5} < 3$. Množina M je tedy omezená. Ukážeme ještě, že M je uz. To nám dá, že M je kompaktní, dle Věty 12. Dle Věty 14 pak budeme vědět, že funkce f na M nabývá extrémů.

$M = [2x + y \leq 2] \cap [x \geq 0] \cap [x \leq 2] \cap [y \geq 0] \cap [y \leq 1]$. Dle Věty 11 je M průnikem uz. množin, dle Věty 2, 5 jde tedy o uz. mn.

Určeme tedy nyní supremum a infimum f na M a kde svých extrémů na M nabývá. Opět nás zajímají $M^y = \{x \in \mathbb{R}: [x, y] \in M\}$.



Z obrázku vidíme, že $\cup_{y \in \mathbb{R}} M^y = [0, 1]$. Jelikož f je rostoucí v proměnné x dostáváme, že $\max_M f = f(1, y) = 1$, $\min_M f = f(0, y) = 0$.

Zřejmě f nabývá minima v bodech $[0, y], y \in [0, 1]$, a maxima v bodě $[1, 0]$.

Příklad 1 (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$

M je elipsa s poloosami $1, \frac{1}{2}$, proto $M \subset B(0, 1)$. Navíc je dle Věty 11 M uz., tedy dle Věty 12 je komp. Dle Věty 14 f , jelikož je spojitá, nabývá na M extrémů.

Platí, že $M = [x^2 = 1 - 4y^2, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]]$. Tedy platí

$$\{f(x, y): [x, y] \in M\} = \left\{1 - 4y^2 + y^2: y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} = \left\{1 - 3y^2: y^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]\right\}.$$

Dostáváme $\{f(x, y): [x, y] \in M\} = [\frac{1}{4}, 1]$. Pak $\max_M f = 1, \min_M f = \frac{1}{4}$. Funkce f nabývá maxima v případě, že $y = 0$, tedy v bodech $[\pm 1, 0]$, a minima v případě, že $y^2 = \frac{1}{4}$, tedy v bodech $[0, \pm \frac{1}{2}]$.

Příklad 1 (d) $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$ a $M = [-1, 1]^3$

M je krychle a jelikož je M zřejmě kompaktní a f spojitá, tak dle Věty 14 f nabývá extrémů na množině M .

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \sup_M f &= \sup \{(x + y)^2 + (x - y)^2 + z: x, y, z \in [-1, 1]\} = \\ &= \sup \{2x^2 + 2y^2: x, y \in [-1, 1]\} + 1 = 5, \end{aligned}$$

$$\inf_M f = \inf \{2x^2 + 2y^2 + z: x, y, z \in [-1, 1]\} = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Zřejmě též platí, že f nabývá maxima v bodech $[1, 1, 1]$, $[1, -1, 1]$, $[-1, 1, 1]$, $[-1, -1, 1]$ a minima v bodě $[0, 0, -1]$.

Příklad 1 (e) $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 = 1\}$

M je elipsa a podobně jako dříve se dá ukázat, že jde o kompaktní množinu a proto f nabývá na M extrémů.

Pomocí Věty 16 zjistíme extrémy f na $\text{Int } M$ a porovnejme je s hodnotami na $H(M)$.

Platí: $f'_x(x, y) = 2x + 12y$, $f'_y(x, y) = 4y + 12x$.

Zřejmě parciální derivace existují ve všech bodech $\text{Int } M$. Vyšetřeme, zda jsou někde v $\text{Int } M$ obě nulové.

$$f'_x(x, y) = 0 \iff x = -6y, f'_y(x, y) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}y$$

Obě derivace jsou tedy zároveň nulové v případě, že $x = -6y$ a $-6y = -\frac{1}{3}y$, tedy pokud $x = y = 0$. Avšak $[0, 0] \notin M$. Proto f svých extrémů nabývá na $H(M)$.

Jelikož $M = [y^2 = 1 - 4x^2]$, můžeme vyšetřovat maximum a minimum výrazu $f(x, \pm\sqrt{1 - 4x^2})$ pro x t.ž. $0 \leq 1 - 4x^2$ - tj. pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$f(x, \pm\sqrt{1 - 4x^2}) = x^2 \pm 12x\sqrt{1 - 4x^2} + 2(1 - 4x^2) = -7x^2 + 2 \pm 12x\sqrt{1 - 4x^2}, \text{ přičemž } x^2 \in [0, \frac{1}{4}].$$

Provedeme-li substituci $a = x^2$, pak hledání extrémů funkce f na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ přechází na hledání extrému funkce $\tilde{f}(a) = -7a + 2 \pm 12\sqrt{a - 4a^2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$.

$$\tilde{f}'(a) = -7 \pm \frac{6(1 - 8a)}{\sqrt{a - 4a^2}} = \frac{-7\sqrt{a - 4a^2} \pm 6(1 - 8a)}{\sqrt{a - 4a^2}}$$

$$\tilde{f}'(a) = 0 \iff -7\sqrt{a - 4a^2} \pm 6(1 - 8a) = 0$$

$$-7\sqrt{a - 4a^2} \pm 6(1 - 8a) = 0$$

$$\pm 6(1 - 8a) = 7\sqrt{a - 4a^2}$$

$$36(1 - 8a)^2 = 49(a - 4a^2)$$

$$2500a^2 - 625a + 36 = 0$$

$$a \in \left\{ \frac{4}{25}, \frac{9}{100} \right\}$$

Body podezřelé z extrémů funkce $\tilde{f}$ na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$ jsou $0, \frac{4}{25}, \frac{9}{100}, \frac{1}{4}$. Dosaďme je a podívejme se na nejmenší a největší hodnoty. Poté přejdeme k funkci f - provedeme desubstituci $x = \pm\sqrt{a}$ (lze si všimnout, že $\tilde{f}(a) = f(\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{1 - 4a})$).

$$\tilde{f}(0) = 2$$

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\tilde{f}\left(\frac{4}{25}\right) = \begin{cases} \frac{94}{25} \\ -2 \end{cases}$$

$$\tilde{f}\left(\frac{9}{100}\right) = \begin{cases} \frac{17}{4} \\ -\frac{151}{100} \end{cases}$$

Nejmenší hodnota je -2 v bodě $\frac{4}{25}$, tedy $x = \pm\frac{2}{5}, y = -\sqrt{1-4x^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$, a největší je $\frac{17}{4}$ v bodě $a = \frac{9}{100}$, tedy v bodě $x = \pm\frac{3}{10}, y = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-\frac{36}{100}} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

POZOR: Korektně bychom měli pracovat s funkcemi $g_1(a) = -7a + 2 + 12\sqrt{a - 4a^2}$ a $g_2(a) = -7a + 2 - 12\sqrt{a - 4a^2}$. Výpočty pro tyto funkce by byl takřka identický, proto jsme od toho upustili a jen při vyhodnocování funkčních hodnot jsme pracovali s $\pm$. Taky bylo potřeba si dát pozor u desubstituce při výpočtu y - zda máme pracovat s plusem či mínusem.

Příklad 1 (f) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

Proveďme substituci $a = x^2 + y^2, a \in [0, \infty)$ a zkoumejme funkci $g(a) = ae^{-a}$.

$$\begin{aligned} g'(a) &= (1-a)e^{-a} \\ g'(a) &= 0 \iff a = 1 \end{aligned}$$

Funkce g je na intervalu $[0, 1]$ rostoucí a na $[1, \infty)$ klesající, přičemž $g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{e}, g(a) \rightarrow 0$ pro $a \rightarrow \infty$ a nuly nabývá pouze v $a = 0$. Z toho dostáváme, že funkce g nabývá svého maxima $\frac{1}{e}$ v bodě $a = 1$ a minima 0 v bodě $a = 0$.

Pak funkce f nabývá minima 0 v bodě $[0, 0]$ a maxima $\frac{1}{e}$ v bodech $[x, y]$, které splňují, že $x^2 + y^2 = 1$.

Pokud se mermomoci chceme vyhnout substituci $x^2 + y^2 = a$, lze to udělat **takto**:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - y^2) \\ f'_y(x, y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - y^2) \\ f'_x(x, y) &= 0 \iff (x = 0 \vee 1 = x^2 + y^2) \\ f'_y(x, y) &= 0 \iff (y = 0 \vee 1 = x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Z Věty 16 vyplývá, že body podezřelé z extrémů jsou počátek a množina $[x^2 + y^2 = 1]$.

$f(0, 0) = 0$ a na $[x^2 + y^2 = 1]$ je f rovna $\frac{1}{e}$.

Věta 16 nám však dává jen lokální extrémy a množina M je neomezená. Může se nám proto stát, že funkce f má na M pouze supremum či infimum, resp., že nabývá větších či menších hodnot, než $\frac{1}{e}$ a 0 . Rozmysleme si proto řádně, zda získané hodnoty jsou skutečně extrémy f na M .

V prvé řadě zřejmě $f(x, y) \geq 0$, tedy 0 je skutečně minimem funkce f na M .

Ukažme, že $f(x, y) \leq \frac{1}{e}$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2+y^2}} &\leq \frac{1}{e} \\ x^2 + y^2 &\leq e^{x^2+y^2-1} \end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat, že $x \leq e^{x-1}$ pro všechna $x \geq 0$. Tedy, že $0 \leq e^{x-1} - x$. Pro $x = 0$ to zřejmě platí, neb $0 \leq \frac{1}{e}$. Zderivujme $e^{x-1} - x$. Dostáváme $e^{x-1} - 1$, což je pro $x \in (0, 1)$ záporné, pro $x = 1$ nulové a pro $x \in (1, \infty)$ kladné. Tedy funkce $e^{x-1} - x$ začíná v bodě $\frac{1}{e}$, klesne na hodnotu $e^{1-1} - 1 = 0$ a pak dál roste. Z toho plyne, že $e^{x-1} - x \geq 0$ pro $x \geq 0$, což jsme chtěli ukázat.

Příklad 1 (g) $f(x, y) = (x + y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= e^{-2x-3y} - 2(x+y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 2(x+y)) \\
f'_y(x, y) &= e^{-2x-3y} - 3(x+y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 3(x+y)) \\
f'_x = 0 &\iff x+y = \frac{1}{2} \\
f'_y = 0 &\iff x+y = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Dle Věty 16 funkce f na množině $\text{Int } M$ nenabývá extrémů.

Zbývá vyšetřit její hodnoty na hranici. $f(x, 0) = xe^{-2x}$ a její derivace zde (tj. na x -ové poloose) nám říká, že extrému se zde nabývá pro $x = \frac{1}{2}$ - a to hodnoty $\frac{1}{2e}$. Podobně f na y -ové poloose nabývá lokálního extrému $\frac{1}{3e}$ pro $y = \frac{1}{3}$. Zřejmě má funkce f minimum 0 v bodě $[0, 0]$.

Hodnota $\frac{1}{2e}$ je lokálním maximem funkce f na M . Zbývá ukázat, že jde o globální maximum. M . Chceme tedy ukázat, že pro každé $x, y > 0$ platí $\frac{1}{2e} \geq (x+y)e^{-2x-3y}$. Upravme nerovnici.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2e} - (x+y)\frac{1}{e^{2x+3y}} &\geq 0 \\
\frac{e^{2x+3y} - 2(x+y)}{2e^{2x+3y}} &\geq 0 \\
e^{2x+3y-1} - 2(x+y) &\geq 0
\end{aligned}$$

Zderivováním funkce $g(x, y) = e^{2x+3y-1} - 2(x+y)$ zjistíme, že poslední uvedená nerovnost platí vždy (viz níže), tedy hodnota $\frac{1}{2e}$ skutečně globálním maximem f na M .

$$\begin{aligned}
g'_x(x, y) &= 2(e^{2x+3y-1} - 1) \\
g'_y(x, y) &= 3e^{2x+3y-1} - 2 \\
g'_x = 0 &\iff 2x + 3y - 1 = 0 \\
g'_y = 0 &\iff 2x + 3y - 1 = \ln \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Uvažujme pevně dané $y \geq 0$. V x -ovém směru pak funkce g klesá do $x = \frac{1}{2}(1 - 3y)$, pak roste. Platí $g(\frac{1}{2}(1 - 3y)) = y \geq 0$. Pokud tedy $g(0, y) \geq 0$, pak je $g(x, y) \geq 0$ pro každé $x \geq 0$. Ukažme nyní, že $g(0, y) \geq 0$ pro $y \geq 0$. Pro $y = 0$ je to zřejmé. Funkce g v y -ovém směru klesá do $y = \frac{1}{3}(\ln \frac{2}{3} + 1)$ a pak roste (vidno z g'_y). Platí, že $g(0, \frac{1}{3}(\ln \frac{2}{3} + 1)) = -\frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} > 0$. Nejmenší hodnota funkce g na kladné poloose y je tedy kladná, g je proto na kladné poloose y kladná, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 1 (h) $f(x, y) = (x+y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$

Podobně jako v předchozím příkladě dojdeme k tomu, že f nenabývá na M extrémů. Můžeme tedy jen určit supremum a infimum. Stejně jako v předchozím příkladu se ukáže, že $\frac{1}{2e}$ je horní závorou množiny $f(M)$ a 0 dolní závorou.

Ukažme nyní, že se k hodnotám $0, \frac{1}{2e}$ lze libovolně přiblížit - z toho plyne, že jde skutečně o infimum a supremum.

Hledáme posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Víme, že $f(0, 0) = 0$ a že f je spojitá. Stačí tedy volit posloupnost tak, aby konvergovala k 0 a pak ze spojitosti f a Heineho věty dostáváme, že $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Posloupnost lze volit např. takto: $x_n = y_n = \frac{1}{n}$.

Stejnou myšlenkou dostáváme, že stačí najít posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. konvergují k bodu $[\frac{1}{2}, 0]$. Body lze volit např. takto: $x_n = \frac{1}{2}, y_n = \frac{1}{n}$.

Příklad 1 (i) $f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

Derivujme funkci f - tím dle Věty 16 získáme body podezřelé z extrému.

$$f'_x(x, y) = 2xe^{-(3x^2+y^2)} + (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}(-6x) = e^{-(3x^2+y^2)}(2x - 6x^3 - 30xy^2)$$

$$f'_y(x, y) = e^{-(3x^2+y^2)}(10y - 2yx^2 - 10y^3)$$

$$f'_x = 0 \iff 2x(1 - 3x^2 - 15y^2) = 0 \iff \left(x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{3} - 5y^2\right)$$

$$f'_y = 0 \iff 2y(5 - x^2 - 5y^2) = 0 \iff (y = 0 \vee x^2 = 5 - 5y^2)$$

Body podezřelé z extrému jsou $[0, 0]$, $[0, \pm 1]$ a $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$.

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = f(0, -1) = \frac{5}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{3e}$$

Zřejmě pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x, y) \geq 0$. Funkce f tedy nabývá svého minima 0 v bodě $[0, 0]$. Podobně jako dříve se ukáže, že $\frac{5}{e}$ je globální maximum.

Příklad 3 (a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Použijeme Větu 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru) - ta nám dá body podezřelé z extrémů (pro funkci f na množině M). Zadefinujme funkci $g(x, y) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Pak $M = [g = 0]$.

Spočteme parciální derivace g a vyjádřeme ∇g .

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} g'_x(x, y, z) \\ g'_y(x, y, z) \\ g'_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x = 2y = 2z = 0 \iff x = y = z = 0 \iff [x, y, z] = [0, 0, 0]$$

Jelikož jediný bod, ve kterém má g nulový gradient, se nachází mimo M ($[0, 0, 0] \notin M$), tak z podmínky (I) neodstáváme žádné body podezřelé z extrémů. Vyšetřeme nyní podmínku (II).

$$f'_x(x, y, z) = 1$$

$$f'_y(x, y, z) = -2$$

$$f'_z(x, y, z) = 2$$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2)$$

Pak rovnost $\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$ nám dává následující soustavu.

$$\begin{aligned}1 + \lambda 2x &= 0 \\ -2 + \lambda 2y &= 0 \\ 2 + \lambda 2z &= 0\end{aligned}$$

Vyjádřením λ dostáváme následující sadu podmínek (všimněme si, že pokud by x, y nebo z bylo nulové, pak by příslušná rovnice nemohla být splněna, tedy BÚNO $x, y, z \neq 0$).

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-1}{2x} \\ \lambda &= \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \\ \lambda &= \frac{-2}{2z} = \frac{-1}{z} \\ \lambda &= \frac{-1}{2x} = \frac{1}{y} = \frac{-1}{z} \\ \frac{1}{y} &= \frac{-1}{z} \implies y = -z \\ \frac{-1}{2x} &= \frac{-1}{z} \implies \frac{z}{2} = x\end{aligned}$$

Společně s tím, že bod podezřelý z extrému by měl být prvkem množiny M dostáváme následující soustavu.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ y &= -z \\ x &= \frac{z}{2}\end{aligned}$$

Dosazením posledních dvou rovnic do první dostáváme:

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + (-z)^2 + z^2 &= 1 \\ \frac{z^2}{4} + 2z^2 &= 1 \\ z^2 \cdot \frac{9}{4} &= 1 \\ z^2 &= \frac{4}{9}, \quad z = \pm \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Podezřelými body z extrémů tedy jsou (pomocí z získáme x, y): $\left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$.

Dle Věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a Z Věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Z Věty 24 jsme dostali jediné dva body podezřelé z extrémů. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3$$

Dostáváme, že f nabývá maxima 3 na mn. M v $[\frac{1}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a minima -3 v $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Příklad 3 (b) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$
 Použijeme Větu 24. Použijeme Větu 25. Zadefinujeme

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) := x + y + z.$$

Pak $M = [g_1 = 0, g_2 = 0]$. Platí:

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z), \quad \nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

Podívejme se, jestli nějaký bod splňuje podmínku (I). Zřejmě $\nabla g_2(x, y, z) \neq 0$ a $\nabla g_1(x, y, z) = 0 \iff x = y = z = 0$. Bod $[0, 0, 0]$ však nesplňuje $g_1(x, y, z) = 0$, není tedy prvkem množiny, kterou zkoumáme. Proto není podezřelým bodem.

$$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2 \iff 2x = 2y = 2z = k \iff x = y = z = \frac{k}{2}$$

Pokud by existoval bod $[x, y, z] \in M$ a $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2$, pak by muselo platit, že $k = 0 = x = y = z$ (z podmínky $g_2 = 0$ na M). To je ale v rozporu s tím, že $g_1 = 0$. Odsud tedy nedostáváme žádný podezřelý bod.

K vyšetření podmínky (II) spočtíme parciální derivace f .

$$f'_x(x, y, z) = 1$$

$$f'_y(x, y, z) = -2$$

$$f'_z(x, y, z) = 2$$

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2)$$

Rovnice $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ a $g_1 = 0 = g_2$ dává následující soustavu.

$$1 + 2\alpha x + \beta = 0$$

$$-2 + 2\alpha y + \beta = 0$$

$$2 + 2\alpha z + \beta = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Z prvních tří rovnic dostáváme $-\beta = 1 + 2\alpha x = -2 + 2\alpha y = 2 + 2\alpha z$. Z toho plyne následující.

$$2\alpha(x - y) = -3$$

$$2\alpha(y - z) = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Z prvních dvou rovností speciálně plyne, že $\alpha, x - y, y - z \neq 0$ (neb součin není roven nule, tedy ani činitelé nemohou být rovny nule). Můžeme tedy první dvě rovnosti podělit, čímž dostaneme: $2\alpha = \frac{-3}{x-y} = \frac{4}{y-z}$. Z toho přenásobením jmenovateli dostáváme, že $-3y + 3z = 4x - 4y$. Máme tedy soustavu:

$$\begin{aligned}y &= 4x - 3z \\x + y + z &= 0 \implies x = -y - z \\x^2 + y^2 + z^2 &= 1\end{aligned}$$

První dvě rovnosti dávají $y = -4x - 4z - 3z \implies -7z = 5y \implies z = -\frac{5}{7}y$.

Z toho dále plyne, že $x = -y - z = -y + \frac{5}{7}y = -\frac{2}{7}y$. Dosadíme do poslední rovnice a dostáváme následující.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{7}y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{5}{7}y\right)^2 &= 1 \\ \frac{4}{49}y^2 + y^2 + \frac{25}{49}y^2 &= 1 \\ \frac{78}{49}y^2 &= 1 \\ y^2 &= \frac{49}{78}\end{aligned}$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right], \left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Dle Věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a z Věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Z Věty 24 jsme dostali jediné dva body podezřelé z extrémů. Vyšetřeme funkční hodnoty f v těchto bodech.

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right) &= \frac{-2 - 14 - 10}{\sqrt{78}} = \frac{-26}{\sqrt{78}} \\ f\left(\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right) &= \frac{26}{\sqrt{78}}\end{aligned}$$

Maximum: $\frac{26}{\sqrt{78}}$ v $\left[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right]$, minimum: $\frac{-26}{\sqrt{78}}$ v $\left[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}\right]$.

Příklad 3 (c) $f(x, y, z) = xyz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$

Zřejmě $\text{Int } M \neq \emptyset$. Proto vyšetříme funkci f na $\text{Int } M$ a pak na $H(M)$.

K vyšetření extrémů na $\text{Int } M$ použijeme Větu 16.

$$\begin{aligned}f'_x(x, y, z) &= yz \\ f'_y(x, y, z) &= xz \\ f'_z(x, y, z) &= xy\end{aligned}$$

Dle Věty 16 dostáváme, že body $[0, 0, z], [0, y, 0], [x, 0, 0] \in M$ pro $x, y, z \in [0, 1]$, jsou body podezřelými z extrému.

Nyní vyšetřeme chování f na hranici. Zdefinujeme

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) := x + y + z.$$

Z definice hranice lze ukázat, že $H(M) = ([g_1 = 0] \cap M) \cup ([g_2 = 0] \cap M) = [g_1 = 0, g_2 \geq 0] \cup [g_2 = 0, g_1 \leq 0] = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_2 = 0 = g_1] \cup [g_2 = 0, g_1 < 0]$. Vyšetřeme tedy chování funkce f na všech třech množinách v poslední rovnosti - použijeme Věty 24, 25. Spočtíme nejdříve parciální derivace funkcí g_1, g_2 .

Poznámka: je třeba to takto rozdělit, neb Větu 24 lze použít jen pro G otevřenou. Nelze tedy zkoumat $[g_1 = 0, g_2 \geq 0]$ pomocí Věty 24, ale pouze množinu $[g_1 = 0, g_2 > 0]$.

$$\begin{aligned} (g_1)'_x(x, y, z) &= 2x, & (g_2)'_x(x, y, z) &= 1 \\ (g_1)'_y(x, y, z) &= 2y, & (g_2)'_y(x, y, z) &= 1 \\ (g_1)'_z(x, y, z) &= 2z, & (g_2)'_z(x, y, z) &= 1 \end{aligned}$$

• $[g_1 = 0, g_2 > 0]$ Použijeme Větu 24 na množinu $\{x \in [g_2 > 0] : g_1(x) = 0\}$ (G ze znění věty je tedy ot. mn. $[g_2 > 0]$).

(I):

$$\nabla g_1 = 0 \iff [x, y, z] = [0, 0, 0]$$

Počátek nesplňuje podmínku $g_1 = 0$, nedostáváme tedy podezřelý bod.

(II):

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$ společně s $g_1 = 0$ a $x + y + z \geq 0$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0 \\ xz + 2\lambda y &= 0 \\ xy + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &> 0 \end{aligned}$$

První tři rovnice dávají: $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$. Je-li $\lambda = 0$, pak musí alespoň dvě z x, y, z být nulové. Z podmínky $g_2 > 0$, pak dostáváme, že zbylá musí být kladná. Podmínka $g_1 = 0$ pak dává, že zbylá proměnná musí být rovna jedné. Dostáváme tedy body $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$.

Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Pak je-li jedna z proměnných x, y, z nulová, musí být všechny nulové (neb $2\lambda x = -yz, 2\lambda y = -xz, 2\lambda z = -xy$). Můžeme tedy předpokládat, že $x, y, z \neq 0$. Ze zmíněných rovností pak dostáváme následující.

$$\lambda = \frac{-yz}{2x} = \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z} \implies x = \pm y, \quad z = \pm y$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \implies y^2 = \frac{1}{3}$$

$$x + y + z \geq 0 \implies \text{podezřelé body jsou: } \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

Podezřelými body z této části hranice jsou:

$$[0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

- $[g_2 = 0, g_1 < 0]$ Věta 24 pro $G = [g_1 < 0]$

(I): $\nabla g_1 \neq 0 \implies$ žádné podezřelé body.

(II)

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0$ spolu s $[x, y, z] \in [g_2 = 0, g_1 < 0]$ dává následující.

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &< 1 \end{aligned}$$

První tři rovnice, podobně jako výše, dávají, že alespoň dvě z proměnných x, y, z jsou nulové. Podmínka $x + y + z = 0$ pak dává, že nutně $x = y = z = 0$. Počátek je již zahrnut v podezřelých bodech.

Nedostali jsme tedy žádné nové podezřelé body.

- $[g_1 = 0 = g_2]$ Použijeme Větu 25.

(I):

$$\begin{aligned} \nabla g_2 &= 0 \text{ nikdy} \\ \nabla g_1 &= k \cdot \nabla g_2 \implies k = 2x = 2y = 2z \implies x = y = z \end{aligned}$$

Zároveň chceme, aby $g_2(x, y, z) = 0$, z čehož plyne, že $x = y = z = 0$ a počátek již máme zahrnut v podezřelých bodech.

(II):

Rovnost $\nabla f + \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0$ společně s $g_1 = 0 = g_2$ dostáváme následující soustavu.

$$\begin{aligned} yz + 2\alpha x + \beta &= 0 \\ xz + 2\alpha y + \beta &= 0 \\ xy + 2\alpha z + \beta &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

První tři rovnosti dávají: $-\beta = yz + 2\alpha x = xz + 2\alpha y = xy + 2\alpha z$, což dává:

$$\begin{aligned} 2\alpha(x - y) &= z(x - y) \\ 2\alpha(y - z) &= x(y - z) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

Pokud $x - y = 0$, pak dostáváme z $x + y + z = 0$, že $z = -2x$. Dosadíme do předposlední rovnice a dostaneme:

$$2x^2 + (-2x)^2 = 1 \implies 6x^2 = 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Podezřelé body: $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{2}{\sqrt{6}}\right]$

Pokud $x - y \neq 0$, budeme uvažovat dvě situace: $y - z = 0$ $y - z \neq 0$. Obě situace dopadnou velmi analogicky a dostaneme následující body: $\left[\mp \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

Celkově podezřelými body jsou:

$$\begin{aligned} &[0, 0, z], [0, y, 0], [x, 0, 0] \in M \text{ pro } x, y, z \in [0, 1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ &\left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\mp \frac{2}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{2}{\sqrt{6}}\right]. \end{aligned}$$

Dle Věty 12 lze snadno ukázat, že M je kompaktní a Z Věty 14 plyne, že f nabývá na M extrémů. Vyšetřeme hodnoty f v podezřelých bodech.

$$f(0, 0, z) = f(x, 0, 0) = f(0, y, 0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\text{Maximum: } \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ v } \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \text{ minimum: } -\frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ v } \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \mp \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Příklad 3 (d) $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

Použijeme Větu 24. Zadefinujeme $g(x, y, z) := x + y + z - \frac{\pi}{2}$, $G := [x > 0, y > 0, z > 0]$. Pak $M = \{x \in G: g(x) = 0\}$ a G je otevřená (víme z teorie ze 2. cvičení).

$$g'_x(x, y, z) = 1$$

$$g'_y(x, y, z) = 1$$

$$g'_z(x, y, z) = 1$$

Platí: $\nabla g \neq 0$. Podmínka (I) nám tedy nedává žádné body podezřelé z extrému.

K vyšetření podmínky (II) spočítáme parciální derivace f .

$$f'_x(x, y, z) = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z$$

$$f'_y(x, y, z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin z$$

$$f'_z(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\cos x \cdot \sin y \cdot \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z + \lambda = 0$$

Její vyřešením dostáváme:

$$\cos x \cdot \sin y = \sin x \cdot \cos y$$

$$\cos y \cdot \sin z = \sin y \cdot \cos z$$

$$\cos y \cdot \sin z = \sin x \cdot \cos z$$

Soustavu mimo jiné řeší zřejmě body, pro které $\cos x = \cos y = \cos z = 0$, nebo $\sin x = \sin y = \sin z = 0$. To ale nemůže nastat pro $[x, y, z] \in M$, neb z definice M plyne, že speciálně $x, y, z \in (0, \pi/2]$. Můžeme tedy předpokládat, že veškeré $\cos$ a $\sin$ v předchozí soustavě jsou nenulové, můžeme jimi tedy dělit. Dostáváme, že $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$. Tedy $x = y + k\pi = z + l\pi$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{Z}$. Vezmeme-li v úvahu, že $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2}]$, dostáváme, že $k = l = 0$. Tedy $[x, y, z] = [a, a, a]$ pro vhodné $a \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Z podmínky $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ pak plyne, že $a = \frac{\pi}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

Zřejmě množina M je obsažena v množině $M' = [g = 0, x, y, z \in [0, \frac{\pi}{2}]]$, která je kompaktní. Z Věty 14 vyplývá, že f na M' nabývá extrémů a lze ukázat, že f na M' nabývá maxima v $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Z toho dostáváme, že $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ je skutečně bod, ve kterém f nabývá maxima na množině M , neb $\sup_M f \leq \sup_{M'} f$ a f .

Minima se nenabývá, neb jsme neodhalili žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 3 (e) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}, a > 0$

Množina M je polorovinou v $\mathbb{R}^3$ - rovnice $x + 2y + 3z = a$ určuje rovinu a podmínka $x, y > 0$ z ní vysekne jen „půlku“.

Použijeme Větu 24. Zdefinujme $g(x, y, z) := x + 2y + 3z - a$. Pak $M = [g = 0] \cap [x > 0, y > 0]$.

$$g'_x(x, y, z) = 1$$

$$g'_y(x, y, z) = 2$$

$$g'_z(x, y, z) = 3$$

Platí následující.

$$\nabla g \neq 0$$

Z podmínky (I) nedostáváme žádný podezřelý bod.

K vyšetření podmínky (II) spočtíme parciální derivace f . (a je konstanta, čili zderivuje se na 0)

$$f'_x(x, y, z) = y^2z^3$$

$$f'_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

$$f'_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned} y^2 z^3 + \lambda &= 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda &= 0 \\ 3xy^2 z^2 + 3\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Pokud by $\lambda = 0$, pak by muselo platit, že $y^2 z^3 = 2xyz^3 = 3xy^2 z^2 = 0$, z čehož plyne, že by muselo alespoň jedno z x, y, z být rovno 0. Pak by ovšem nešlo o bod množiny M . Naopak, pokud $\lambda \neq 0$, pak nemůže ani jedno z x, y, z být rovno nule a těmito proměnnými můžeme dělit.

Vyřešením soustavy pro $\lambda \neq 0$ dostáváme:

$$-\lambda = y^2 z^3 = xyz^3 = xy^2 z^2 \implies y = x = z$$

Dosazením do rovnosti $x + 2y + 3z = a$ dostáváme: $6x = a$, tedy $x = \frac{a}{6}$.

Celkově podezřelými body jsou: $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$.

Jelikož nám vyšel jediný podezřelý bod, zbývá nám zjistit, zda jde o minimum, či maximum. Platí, že $f(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}) = (\frac{a}{6})^6$.

Jelikož množina $M' := [g = 0] \cap [x \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]] \cap [y \in [\frac{a}{7}, \frac{a}{5}]]$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a jde o podmnožinu M obsahující bod $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$, lze ukázat, že f v $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$ nabývá lokálního maxima pomocí Věty 14 (nabývá tam maxima vzhledem k mn. M'). Ukažme nyní, že jde o maximum na množině M (a nikoli jen o lokální maximum). Zřejmě, aby byla hodnota f velká, musí být $z > 0$. Proto stačí uvažovat jen takové body množiny M , pro které $z > 0$. Jelikož $z = \frac{a-2y-x}{3}$, je třeba, aby $a - 2y - x > 0$, aby bylo z kladné. Tj. je potřeba, aby $x + 2y < a$. Speciálně $x < a, y < \frac{a}{2}$. Stačí tedy zkoumat následující.

$$\sup \left\{ xy^2 z^3 : x \in (0, a), y \in (0, \frac{a}{2}), z = \frac{a-x-2y}{3} \right\} = \sup \left\{ xy^2 \frac{1}{27} (a-x-2y)^3 : x \in (0, a), y \in (0, \frac{a}{2}) \right\}.$$

TODO

Uvědomme si nejdříve, že pokud bychom dosadili krajní hodnoty (tj. vyzkoušeli bychom $x = 0, y = 0, x = a, y = \frac{a}{2}$), dostali bychom, že $f \leq 0$. Supremum tedy nebude v krajních bodech.

Uvažujme nejdříve $y \in (0, \frac{a}{2})$ pevně dané. Zkoumáme tedy $g(x) = xy^2 \frac{1}{27} (a-x-2y)^3$ na intervalu $(0, a)$. Funkci g zderivujeme, abychom vyšetřili její extrémy.

$$g'(x) = \frac{y^2}{27} (a-x-2y)^3 - \frac{xy^2}{9} (a-x-2y)^2 = \frac{y^2}{27} (a-x-2y)^2 (a-4x-2y)$$

Body podezřelé z extrému pro funkci g jsou $a-x-2y = 0 \implies x = a-2y, a-4x-2y = 0 \implies x = \frac{a}{4} - \frac{y}{2}$. Platí, že $g(a-2y) = 0$ a $g(\frac{a}{4} - \frac{y}{2}) = (\frac{a}{4} - \frac{y}{2}) \frac{y^2}{27} (\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}y)^3$.

Zkoumejme nyní maximum funkce $h(y) = (\frac{a}{4} - \frac{y}{2}) \frac{y^2}{27} (\frac{3}{4}a - \frac{3}{2}y)^3$ pro $y \in (0, \frac{a}{2})$.

$$h'(y) = \frac{1}{128} y(a-6y)(a-2y)^3.$$

Podezřelým bodem na intervalu $(0, \frac{a}{2})$ je: $y = \frac{a}{6}$. A v daném bodě je $x = y = z = \frac{a}{6}$ a $f = \frac{a^6}{6^6}$. Jde o jediný bod podezřelý z extrému, ve kterém vychází kladná hodnota. Jde tedy o supremum, jež jsme hledali. Máme tedy, že $\sup_M f = \sup \left\{ xy^2 z^3 : x \in (0, a), y \in (0, \frac{a}{2}), z = \frac{a-x-2y}{3} \right\} = (\frac{a}{6})^6$.

Funkce f nenabývá na množině M minima, neb nám nevyšel žádný další bod podezřelý z extrému.

Příklad 3 (f) $f(x, y) = x^2 + y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$

Zdefinujme $g(x, y) := 4y^3 - 4y + x^2$. Pak $M = [g = 0] \cap [y \geq 0]$.

Všimněme si, že M je kompaktní: Aby $x^2 = 4y - 4y^3 \geq 0$, musí platit, že $y \in [0, \frac{1}{2}]$ (uvažujeme-li jen body z M). Tedy platí, že $M = [g = 0] \cap [y \in [0, \frac{1}{2}]]$. Dle teorie z 2. cvičení je M kompaktní. Dle Věty 14 dostáváme, že f jakožto spojitá funkce nabývá na M extrémů. Nalezneme tedy její lokální minima a maxima. Pak největší a nejmenší nám dají globální maxima a minima.

Použijeme Větu 24. Pro $G = [y > 0]$ můžeme použít Větu 24 (je potřeba, aby G byla ot.). Navíc vyšetříme chování funkce f na $[g = 0] \cap [y = 0]$: pokud $y = 0, [x, y] \in M$, pak $x = 0$. K podezřelým bodům tedy zařadíme ještě počátek.

$$\begin{aligned}g'_x(x, y) &= 2x \\g'_y(x, y) &= 12y^2 - 4\end{aligned}$$

Platí následující.

$$\nabla g = 0 \iff 2x = 0 = 12y^2 - 4 \iff x = 0, y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dostáváme podezřelý bod: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (nebo $y > 0$ dle volby G).

K vyšetření podmínky (II) spočtíme parciální derivace f .

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= 2x \\f'_y(x, y) &= 1\end{aligned}$$

Rovnice $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ dává následující soustavu.

$$\begin{aligned}2x + 2\lambda x &= 0 \\1 + \lambda(12y^2 - 4) &= 0\end{aligned}$$

Její vyřešením dostáváme za podmínky $[x, y] \in M$:

$$\begin{aligned}\lambda = -1 \implies y &= \sqrt{\frac{5}{12}}, x = \pm 2\sqrt{y - y^3} = \pm 2\sqrt{\sqrt{\frac{5}{12}} - \left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3} = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}} \\x = 0, 12y^2 - 4 \neq 0 \implies 4y^3 - 4y &= 0 \implies y = 0 \vee y = 1\end{aligned}$$

Celkově podezřelými body jsou: $\left[\pm \sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right], [0, 0], [0, 1], \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Vyšetřeme hodnoty funkce f v uvedených bodech. Pak největší hodnota nám dá maximum a nejmenší minimum.

$$\begin{aligned}f\left(\pm \sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right) &= \frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} + \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} \\f(0, 0) &= 0 \\f(0, 1) &= 1 \\f\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Zřejmě $\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{12}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tedy maximum: $\frac{1}{\sqrt{3}}$ v $\left[\pm \sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}}, \sqrt{\frac{5}{12}}\right]$ a minimum: 0 v $[0, 0]$.